$$\inf_{k\geqslant n} a_k := \inf\{a_k : k \geqslant n\}, \quad \inf_k a_k := \inf_{k\geqslant 1} a_k,$$

$$\overline{\lim}\, a_n := \inf_n \sup_{k\geqslant n} a_k \quad (\textit{limesz szuperior}),$$

$$\underline{\lim}\, a_n := \sup_n \inf_{k\geqslant n} a_k \quad (\textit{limesz inferior}).$$

1.4. Definíció. Legyen I egy halmaz és $c_i \in [0,\infty]$ $\forall i \in I$.

① Ha $I = \emptyset$, akkor $\sum\limits_{i\in I} c_i := 0$.

② Ha $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$, akkor $\sum\limits_{i\in I} c_i := c_{i_1} + c_{i_2} + \dots + c_{i_n}$.

③ Ha I végtelen, akkor $\sum\limits_{i\in I} c_i := \sup\Big\{\sum\limits_{i\in I^*} c_i : I^* \text{ véges részhalmaza } I\text{-nek}\Big\}$.

1.5. Tétel. *Ha $I \subset \mathbb{N}$, $c_i \in [0,\infty]$ $\forall i \in I$ és $I_n = \{i \in I : i \leqslant n\}$, akkor*

$$\sum_{i\in I} c_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I_n} c_i.$$

Bizonyítás. Ha az I üres halmaz, akkor az állítás triviális. Ellenkező esetben legyen $H := \Big\{\sum\limits_{i\in I^*} c_i : I^* \subset I,\ I^* \text{ véges}\Big\}$, $J \subset I$ véges nem üres halmaz és $m := \max J$. Ha $J \neq I_m$, akkor $\sum\limits_{i\in J} c_i \leqslant \sum\limits_{i\in I_m} c_i$ és $\sum\limits_{i\in I_m} c_i \in H$. Ebből következik, hogy

$$\sum_{i\in I} c_i \underset{\substack{\Uparrow\\ \text{def.}}}{=} \sup H = \sup\Big\{\sum_{i\in I_n} c_i : n \in \mathbb{N}\Big\} \underset{\substack{\Uparrow\\ \sum\limits_{i\in I_n} c_i \text{ mon. nő}}}{=} \lim_{n\to\infty} \sum_{i\in I_n} c_i. \qquad \square$$

1.6. Definíció. Legyen I egy halmaz, $c_i \in \mathbb{R}_b$ $\forall i \in I$,

$$I_+ := \{i \in I : c_i > 0\} \quad \text{és} \quad I_- := \{i \in I : c_i < 0\}.$$

Ha $\sum\limits_{i\in I_+} c_i < \infty$ vagy $\sum\limits_{i\in I_-} (-c_i) < \infty$, akkor legyen

$$\sum_{i\in I} c_i := \sum_{i\in I_+} c_i - \sum_{i\in I_-} (-c_i).$$

Használni fogjuk a következő jelöléseket is:

$$\sum_{i=1}^{n} c_i := \sum_{i\in\{1,\dots,n\}} c_i \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{\infty} c_i := \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i.$$

1.7. Tétel. *Ha $c_i \in \mathbb{R}_b$ $\forall i \in \mathbb{N}$ és $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$ létezik, akkor $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i$.*

Bizonyítás. Legyen $I_{n+} := I_+ \cap \{1, \ldots, n\}$ és $I_{n-} := I_- \cap \{1, \ldots, n\}$. Az előző tétel miatt $\sum\limits_{i \in I_+} c_i = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i \in I_{n+}} c_i$ és $\sum\limits_{i \in I_-} (-c_i) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i \in I_{n-}} (-c_i) \Longrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_i = \sum_{i \in I_+} c_i - \sum_{i \in I_-}(-c_i) = \lim_{n\to\infty}\Big(\sum_{i \in I_{n+}} c_i - \sum_{i \in I_{n-}} (-c_i)\Big) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} c_i. \qquad \square$$

A következő tétel szerint a klasszikus analízisben definiált feltételesen konvergens sorok összege az előző értelemben nem léteznek.

1.8. Tétel. *Ha $c_i \in \mathbb{R}_b$ $\forall i \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} c_i \in \mathbb{R}$ és $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} |c_i| = \infty$, akkor $\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i$ az előző értelemben nem létezik.*

2. Mértéktér

A mérték az alaphalmaz bizonyos részhalmazaihoz nemnegatív valós számot vagy ∞-t rendel. Kérdés, hogy milyen rendszert alkossanak a mértékkel rendelkező (mérhető) halmazok és a mértéknek milyen alaptulajdonságaik legyenek?

2.1. Definíció. Legyen X egy halmaz. Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert *σ-algebrának* nevezzük, ha

① $X \in \mathcal{A}$,

② $\overline{A} = X \setminus A \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}$,

③ $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$, ha $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$.

Ekkor az $(X, \mathcal{A})$ rendezett párt *mérhető térnek*, az $\mathcal{A}$ elemeit *mérhető halmazoknak* nevezzük.

2.2. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér. Ekkor*

① $\emptyset \in \mathcal{A}$,

② $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I \subset \mathbb{N}) \Longrightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$ *és* $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in \mathcal{A}$,

③ $A, B \in \mathcal{A} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$.

Bizonyítás. ► Az ① állítás $\emptyset = \overline{X}$ miatt teljesül.

► ② feltétele mellett legyen $A_i := \emptyset$, ha $i \in \mathbb{N} \setminus I \Longrightarrow \bigcup\limits_{i \in I} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \Longrightarrow$ $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \bigcap\limits_{i \in I} \overline{\overline{A_i}} = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i}} \in \mathcal{A} \Longrightarrow$ ②.

► ③ feltétele mellett $A \setminus B = A \cap \overline{B} \underset{\substack{\Uparrow \\ ②}}{\in} \mathcal{A} \Longrightarrow$ ③. $\square$

2.3. Definíció. Legyen I egy halmaz. Az A_i $(i \in I)$ halmazok *diszjunkt rendszert* alkotnak, ha $A_i \cap A_j = \emptyset$ $\forall i, j \in I$, $i \neq j$ esetén.

2.4. Definíció. A $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ függvényt *mértéknek* nevezzük az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, ha

① $\mu(\emptyset) = 0$,

② (*σ-additivitás*) $\mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ $\forall A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$ diszjunkt rendszerre.

Ekkor $(X, \mathcal{A}, \mu)$-t *mértéktérnek*, $\mu(A)$-t az A mértékének nevezzük.

2.5. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér.

① Ha $\mu(X) < \infty$, akkor a mértékteret ill. a mértéket *végesnek* nevezzük.

② Az $A \subset X$ *σ-véges*, ha $\exists A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ rendszer úgy, hogy $\mu(A_i) < \infty$ $\forall i \in I$ és $A \subset \bigcup\limits_{i \in I} A_i$.

③ Ha X σ-véges, akkor a mértékteret ill. a mértéket σ-végesnek nevezzük.

④ Ha minden 0 mértékű halmaz összes részhalmaza mérhető, akkor a mértékteret ill. a mértéket *teljesnek* nevezzük.

⑤ Jelentse $\mu(A)$ az A halmaz elemeinek a számát $\forall A \in \mathcal{A}$ esetén. Könnyen látható, hogy μ mérték, melyet *számláló mértéknek* nevezünk.

2.6. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér. Ekkor*

① (additivitás) $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ *diszjunktak* $\Longrightarrow \mu\Big(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\Big) = \sum\limits_{i \in I} \mu(A_i)$.

② (monotonitás) $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$.

③ $A, B \in \mathcal{A}$, $A \subset B$, $\mu(A) < \infty \Longrightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

④ (szubadditivitás) $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I \subset \mathbb{N}) \Longrightarrow \mu\Big(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\Big) \leqslant \sum\limits_{i \in I} \mu(A_i)$.

⑤ (folytonosság) $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$, $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \Longrightarrow \mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

⑥ (folytonosság) $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$, $\mu(A_1) < \infty$, $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \Longrightarrow \mu\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \lim\limits_{n \to \infty} \mu(A_n)$.

Bizonyítás. ► ① feltétele mellett legyen $A_i := \emptyset$, ha $i \in \mathbb{N} \setminus I \Longrightarrow$

$$\mu\Big(\bigcup_{i \in I} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \sigma\text{-add.}}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \underset{\substack{\Uparrow \\ \mu(\emptyset)=0}}{=} \sum_{i \in I} \mu(A_i) \Longrightarrow ①.$$

► ② ill. ③ feltétele mellett $\mu(B) = \mu(A \cup (B \setminus A)) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{add.}}}{=} \mu(A) + \mu(B \setminus A) \Longrightarrow$ ② ill. ③.

► ④ feltétele mellett, átindexeléssel mindig elérhetjük, hogy $I = \mathbb{N}$ vagy $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $I = \{1, \ldots, n\}$. Legyen $B_i := A_i \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{i-1} A_k$ $(i \in I)$. Ekkor a B_i $(i \in I)$ diszjunkt

rendszer, $B_i \subset A_i$ és $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I} B_i \Longrightarrow$
$\mu\Big(\bigcup\limits_{i\in I} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup\limits_{i\in I} B_i\Big) \underset{\overset{\Uparrow}{\text{add.}}}{=} \sum\limits_{i\in I}\mu(B_i) \underset{\overset{\Uparrow}{\text{mon.}}}{\leqslant} \sum\limits_{i\in I}\mu(A_i) \Longrightarrow$ ④.

► ⑤ feltétele mellett legyen $B_1 := A_1$, $B_i := A_i \setminus A_{i-1}$ $(i > 1)$. Ekkor a B_i $(i \in I)$ diszjunkt rendszer és $\bigcup\limits_{i\in I} A_i = \bigcup\limits_{i\in I} B_i \Longrightarrow \mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) = \mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \underset{\overset{\Uparrow}{\text{add.}}}{=} \sum\limits_{i=1}^{\infty}\mu(B_i) =$
$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n}\mu(B_i) \underset{\overset{\Uparrow}{\text{add.}}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i\Big) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$.

► ⑥ feltétele mellett legyen $B_i := A_1 \setminus A_i$ $(i \in \mathbb{N}) \Longrightarrow B_i \subset B_{i+1}$ $\forall i \in \mathbb{N}$ és
$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (A_1 \cap \overline{A_i}) = A_1 \cap \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{A_i} = A_1 \cap \overline{\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i} = A_1 \setminus \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \Longrightarrow$
$\mu(A_1) - \mu\Big(\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \underset{\overset{\Uparrow}{\text{③}}}{=} \mu\Big(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i\Big) \underset{\overset{\Uparrow}{\text{⑤}}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\mu(B_n) \underset{\overset{\Uparrow}{\text{③}}}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\big(\mu(A_1) - \mu(A_n)\big) = \mu(A_1) -$
$- \lim\limits_{n\to\infty}\mu(A_n) \Longrightarrow$ ⑥. □

A következő tétel a mértéktér és a teljesség definíciója alapján triviálisan teljesül.

2.7. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $Y \in \mathcal{A}$. Legyen $\mathcal{A}_Y$ az összes olyan mérhető halmaz összessége, mely Y-nak részhalmaza és μ_Y legyen a μ leszűkítése $\mathcal{A}_Y$-ra. Ekkor $(Y, \mathcal{A}_Y, \mu_Y)$ szintén mértéktér, melyet az eredeti tér* Y-hoz tartozó altérének *nevezünk. Ha az eredeti tér teljes, akkor az altere is az.*

3. Külső mérték

Sokszor az alaphalmaz bizonyos egyszerű részhalmazainak már tudjuk a mértékét. Pl. síkbeli ponthalmazok területe esetén az ismert, hogy a téglalapokhoz mit rendeljünk. A cél az, hogy olyan mértéket definiáljunk, amely egybevág ezzel az előzetes mértékkel. Ennek a fejezetnek a tételei erre szolgálnak.

3.1. Definíció. Legyen $\mathcal{H}$ egy halmazrendszer. A $\mu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$ függvényt *szubadditívnak* nevezzük, ha
$$\mu(A) \leqslant \sum_{i\in I}\mu(A_i)$$
minden $I \subset \mathbb{N}$, $A, A_i \in \mathcal{H}$ $(i \in I)$ esetén, melyekre $A \subset \bigcup\limits_{i\in I} A_i$ teljesül.

3.2. Definíció. Ha X egy halmaz és $\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ szubadditív, akkor μ-t *külső mértéknek* nevezzük X-en.

3.3. Tétel. *Legyen μ külső mérték X-en. Ekkor*

① $\mu(\emptyset) = 0$,

② (monotonitás) $A \subset B \subset X \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \mu(B)$.

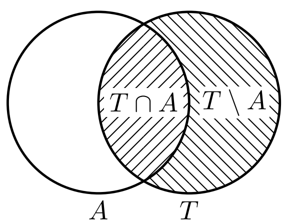
Bizonyítás. ► A szubadditivitás definíciójába $A = I = \emptyset$ írva $\emptyset \subset \bigcup_{i\in\emptyset} A_i = \emptyset \Longrightarrow 0 \leqslant \mu(\emptyset) \leqslant \sum_{i\in\emptyset} \mu(A_i) = 0 \Longrightarrow$ ①.

► ② feltételével legyen $I := \{1\}$ és $A_1 := B \Longrightarrow A \subset B = \bigcup_{i\in I} A_i \Longrightarrow \mu(A) \leqslant \sum_{i\in I} \mu(A_i) = \mu(B)$. □

3.4. Definíció. Legyen μ külső mérték X-en. Az $A \subset X$ *μ-mérhető*, ha

$$\mu(T) = \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A) \quad \forall T \subset X.$$

Az A tehát akkor μ-mérhető, ha bármely T halmazt „additívan” vág ketté.



3.5. *Megjegyzés.* $\mu(T) \leqslant \mu(T \cap A) + \mu(T \setminus A)$ a szubadditivitás miatt, ezért az előző definícióban „=” helyett „⩾” is írható. Másrészt, ha $\mu(A) = 0$, akkor az A halmaz μ-mérhető, hiszen $T \subset X$ esetén $\mu(T) = \mu(A) + \mu(T) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{mon.}}}{\geqslant} \mu(\underbrace{T \cap A}_{A\supset}) + \mu(\underbrace{T \setminus A}_{T\supset})$.

A következő tétel azt mutatja meg, hogy külső mértékből hogyan lehet teljes mértéket konstruálni.

3.6. Tétel. *Legyen μ külső mérték X-en, $\mathcal{A}$ az X μ-mérhető részhalmazainak rendszere és $\widetilde{\mu}$ a μ-nek $\mathcal{A}$-ra vett leszűkítése. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \widetilde{\mu})$ teljes mértéktér.*

A következő tétel azt mutatja meg, hogy egy halmazfüggvényből hogyan lehet külső mértéket konstruálni.

3.7. Tétel. *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0,\infty]$,*

$$\Sigma(B) := \Big\{\sum_{i\in I} \nu(A_i) : I \subset \mathbb{N},\ A_i \in \mathcal{H}\ (i \in I),\ B \subset \bigcup_{i\in I} A_i\Big\} \quad (B \subset X),$$

$$\mu\colon \mathcal{P}(X) \to [0,\infty], \quad \mu(B) := \inf \Sigma(B).$$

Ekkor μ külső mérték X-en és $\mu(B) \leqslant \nu(B)$ $\forall B \in \mathcal{H}$. A μ-t a ν-höz tartozó külső mértéknek nevezzük.

Bizonyítás. ① ► $B \in \mathcal{H}$ esetén $\nu(B) \in \Sigma(B) \Longrightarrow \nu(B) \geqslant \inf \Sigma(B) = \mu(B)$.

② ► Azt kell még belátni, hogy μ szubadditív, azaz ha $J \subset \mathbb{N}$, $B, B_j \subset X$ $(j \in J)$, $B \subset \bigcup\limits_{j\in J} B_j$, akkor $\mu(B) \leqslant \sum\limits_{j\in J} \mu(B_j)$. Ha valamely $j_0 \in J$-re $\Sigma(B_{j_0}) = \emptyset$, akkor $\sum\limits_{j\in J} \mu(B_j) = \infty$, így az előző egyenlőtlenség teljesül. Ha $\Sigma(B_j) \neq \emptyset$ minden $j \in J$-re, akkor rögzített $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén a μ definíciója miatt minden $j \in J$-hez létezik $I_j \subset \mathbb{N}$ és $A_i^{(j)} \in \mathcal{H}$ $(i \in I_j)$, hogy $B_j \subset \bigcup\limits_{i\in I_j} A_i^{(j)}$ és

$$\mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j} \geqslant \sum_{i\in I_j} \nu\big(A_i^{(j)}\big). \tag{3.1}$$

$B \subset \bigcup\limits_{j\in J} B_j \subset \bigcup\limits_{j\in J} \bigcup\limits_{i\in I_j} A_i^{(j)} \Longrightarrow$ (μ definíciója) $\mu(B) \leqslant \sum\limits_{j\in J} \sum\limits_{i\in I_j} \nu\big(A_i^{(j)}\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ (3.1)}}{\leqslant} \sum\limits_{j\in J} \Big(\mu(B_j) + \frac{\varepsilon}{2^j}\Big) \leqslant \sum\limits_{j\in J} \mu(B_j) + \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \sum\limits_{j\in J} \mu(B_j) + \varepsilon \Longrightarrow (\varepsilon \downarrow 0)\ \mu(B) \leqslant \sum\limits_{j\in J} \mu(B_j)$. □

3.8. *Megjegyzés.* Az eddigiek alapján a következőképpen tudunk tetszőleges halmazfüggvényből teljes mértékteret generálni:

Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0,\infty]$, μ a ν-höz tartozó külső mérték, $\mathcal{A}$ az X μ-mérhető részhalmazainak rendszere és $\widetilde{\mu}$ a μ-nek $\mathcal{A}$-ra vett leszűkítése. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \widetilde{\mu})$ teljes mértéktér.

Azonban elvárjuk, hogy az így kapott mérték kiterjesztése legyen ν-nek, azaz, hogy $\mu(A) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{H}$ és $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ teljesüljön. A továbbiakban ennek feltételeit vizsgáljuk.

3.9. Tétel. *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0,\infty]$ és μ a ν-höz tartozó külső mérték. Ekkor $\mu(A) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{H} \Longleftrightarrow \nu$ szubadditív.*

Bizonyítás. ► „$\Rightarrow$" μ külső mérték, azaz szubadditív $\Longrightarrow \nu$ szubadditív.

► „$\Leftarrow$” $A, A_i \in \mathcal{H}$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ és $A \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ esetén $\nu(A) \leqslant \sum_{i\in I} \nu(A_i) \in \Sigma(A)$ $\Longrightarrow$ $\Sigma(A)$-nak $\nu(A)$ alsó korlátja $\Longrightarrow$ $\nu(A) \leqslant \inf \Sigma(A) \underset{\substack{\Uparrow \\ \mu \text{ def.}}}{=} \mu(A) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{3.7. tétel}}}{\leqslant} \nu(A) \Longrightarrow$ $\mu(A) = \nu(A)$. □

A következő tétel azt mondja ki, hogy $\mathcal{H}$-n értelmezett halmazfüggvényhez tartozó μ külső mérték esetén a μ-mérhetőséghez nem kell megvizsgálni az alaphalmaz összes részhalmazát, elég csak a $\mathcal{H}$ elemeit.

3.10. Tétel. *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$, μ a ν-höz tartozó külső mérték és $B \subset X$. Ekkor B μ-mérhető $\Longleftrightarrow$*

$$\nu(A) \geqslant \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) \quad \forall A \in \mathcal{H}.$$

Bizonyítás. ► „$\Rightarrow$” $A \in \mathcal{H}$ esetén $\nu(A) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{3.7. tétel}}}{\geqslant} \mu(A) \underset{\substack{\Uparrow \\ B\ \mu\text{-mérhető}}}{=} \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B)$.

► „$\Leftarrow$” Legyen $T \subset X$, $\Sigma(T) \neq \emptyset$ és $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$. A μ definíciója miatt létezik $A_i \in \mathcal{H}$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$, hogy $T \subset \bigcup_{i\in I} A_i$ és $\mu(T) + \varepsilon \geqslant \sum_{i\in I} \nu(A_i) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{felt.}}}{\geqslant} \sum_{i\in I} \big(\mu(A_i \cap B) + \mu(A_i \setminus B)\big) = \sum_{i\in I} \mu(A_i \cap B) + \sum_{i\in I} \mu(A_i \setminus B) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{szubadd.}}}{\geqslant} \mu\Big(B \cap \bigcup_{i\in I} A_i\Big) + \mu\Big(\overline{B} \cap \bigcup_{i\in I} A_i\Big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{mon.}}}{\geqslant} \mu(B \cap T) + \mu(\underbrace{\overline{B} \cap T}_{T\setminus B}) \Longrightarrow (\varepsilon \downarrow 0)$ $\mu(T) \geqslant \mu(B \cap T) + \mu(T \setminus B)$. Ha $\Sigma(T) = \emptyset$, akkor $\mu(T) = \infty$, miatt az előző egyenlőtlenség ismét teljesül. Így bizonyítottuk, hogy B μ-mérhető. □

3.11. Definíció. Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$ és μ a ν-höz tartozó külső mérték. A ν-t *pre-mértéknek* nevezzük, ha szubadditív és

$$\nu(A) \geqslant \mu(A \cap B) + \mu(A \setminus B) \quad \forall A, B \in \mathcal{H}.$$

A következő tétel a 3.9. és 3.10. tételek következménye.

3.12. Tétel. *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$, μ a ν-höz tartozó külső mérték és $\mathcal{A}$ a μ-mérhető halmazok rendszere. Ekkor $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ és $\mu(A) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{H}$-ra $\Longleftrightarrow$ ν pre-mérték.*

A következő tétel azt állítja, hogy a mérték egyúttal pre-mérték is, így minden mértéktér kiterjeszthető teljes mértéktérré.

3.13. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{H}, \nu)$ mértéktér, μ a ν-höz tartozó külső mérték, $\mathcal{A}$ az X μ-mérhető részhalmazainak rendszere és $\widetilde{\mu}$ a μ-nek $\mathcal{A}$-ra vett leszűkítése. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \widetilde{\mu})$ teljes mértéktér, $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$ és $\mu(A) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{H}$. Az utóbbi mértékteret az $(X, \mathcal{H}, \nu)$* természetes kiterjesztésének *nevezzük.*

Bizonyítás. ① ▶ A 3.6. tétel szerint $(X, \mathcal{A}, \widetilde{\mu})$ teljes mértéktér.
② ▶ ν mérték $\Longrightarrow$ ν szubadditív $\Longrightarrow$ (3.9. tétel) $\mu(A) = \nu(A)$ $\forall A \in \mathcal{H}$.
③ ▶ $A, B \in \mathcal{H}$ esetén $\mu(\underbrace{A \cap B}_{\in \mathcal{H}}) + \mu(\underbrace{A \setminus B}_{\in \mathcal{H}}) \underset{\substack{\Uparrow \\ ②}}{=} \nu(A \cap B) + \nu(A \setminus B) \underset{\substack{\Uparrow \\ \nu \text{ add.}}}{=} \nu(A) \Longrightarrow$
ν pre-mérték $\Longrightarrow$ (3.12. tétel) $\mathcal{H} \subset \mathcal{A}$. □

Ez a fejezet tehát választ adott arra a kérdésre, hogy hogyan lehet olyan mértékteret generálni bizonyos feltételekkel, amelynek értékei néhány speciális halmazon már adottak: *Legyen X egy halmaz, $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$, $\nu\colon \mathcal{H} \to [0, \infty]$, μ a ν-höz tartozó külső mérték, $\mathcal{A}$ az X μ-mérhető részhalmazainak rendszere és $\widetilde{\mu}$ a μ-nek $\mathcal{A}$-ra vett leszűkítése. Ha ν pre-mérték, akkor $(X, \mathcal{A}, \widetilde{\mu})$ olyan teljes mértéktér, melyben $\widetilde{\mu}$ kiterjesztése ν-nek.*

4. Lebesgue-mérték

Ebben a fejezetben a *hosszúságot* konstruáljuk meg a számegyenesen, abból kiindulva, hogy a korlátos intervallumok hossza már ismert. Az $\mathbb{R}$ egyelemű részhalmazait 0 hosszúságú zárt intervallumoknak tekintjük.

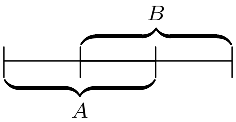
4.1. Definíció. Rendelje ν az $\mathbb{R}$ minden korlátos részintervallumához a hosszát, azaz, ha az intervallum végpontjai a és b, akkor az $|a - b|$ értéket. Legyen λ a ν-höz tartozó külső mérték és $\mathcal{L}$ az $\mathbb{R}$ λ-mérhető részhalmazainak a rendszere. Legyen $\widetilde{\lambda}$ a λ-nak $\mathcal{L}$-re való leszűkítése. Az $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \widetilde{\lambda})$ teljes mértékteret (lásd 3.6. tétel) *Lebesgue-mértéktérnek*, $\mathcal{L}$ elemeit *Lebesgue-mérhető halmazoknak* és $\widetilde{\lambda}$-t *Lebesgue-mértéknek* nevezzük. A továbbiakban $\widetilde{\lambda}$ helyett is λ jelölést használunk.

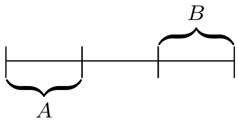
Valójában az $(\mathbb{R}, d)$ metrikus térből kiindulva értelmeztük a Lebesgue-mértéket, ahol d a szokásos metrikát jelenti, azaz $a, b \in \mathbb{R}$ esetén $d(a, b) = |a - b|$.

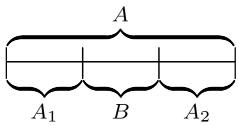
Az előbb definiált ν pre-mérték, így teljesül a következő tétel.

4.2. Tétel. *Az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumai Lebesgue-mérhetőek és Lebesgue-mértékük a hosszukkal egyenlő.*

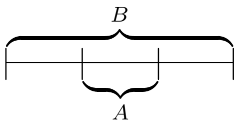
Bizonyítás. Legyen A és B az $\mathbb{R}$ korlátos intervallumai. Ezek kölcsönös helyzetére négy eset lehetséges.

(a)  $\lambda(A\setminus B)+\lambda(A\cap B) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{3.7. tétel}}}{\leqslant} \nu(A\setminus B)+\nu(A\cap B)=\nu(A).$

(b)  $\lambda(\underbrace{A\setminus B}_{A})+\overbrace{\lambda(\underbrace{A\cap B}_{\emptyset})}^{0}=\lambda(A) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{3.7. tétel}}}{\leqslant} \nu(A).$

(c)  $\lambda(\underbrace{A\setminus B}_{A_1\cup A_2})+\lambda(\underbrace{A\cap B}_{B}) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{szubadd.}}}{\leqslant} \lambda(A_1)+\lambda(A_2)+\lambda(B) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{3.7. tétel}}}{\leqslant}$

$\leqslant \nu(A_1)+\nu(A_2)+\nu(B)=\nu(A).$

(d)  $\overbrace{\lambda(\underbrace{A\setminus B}_{\emptyset})}^{0}+\lambda(\underbrace{A\cap B}_{A})=\lambda(A) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{3.7. tétel}}}{\leqslant} \nu(A).$

Tehát azt kaptuk, hogy $\nu(A)\geqslant\lambda(A\setminus B)+\lambda(A\cap B)$ minden $\mathbb{R}$-beli A,B korlátos intervallum esetén. Másrészt ν triviálisan szubadditív $\Longrightarrow$ ν pre-mérték $\Longrightarrow$ A 3.12. tétel miatt kapjuk az állítást. $\square$

A következő tétel szerint a Lebesgue-mérték és a Lebesgue-mérhetőség invariáns az eltolásra.

4.3. Tétel (Eltolás-invariancia)**.** *Legyen* $r\in\mathbb{R}$, $g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x):=x+r$ *és* $A\subset\mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\lambda\big(g(A)\big)=\lambda(A), \tag{4.1}$$

továbbá, ha A Lebesgue-mérhető, akkor $g(A)$ is az.

Bizonyítás. ① ▶ Ha A korlátos intervallum $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ végpontokkal, akkor $g(A)$ is korlátos intervallum $\alpha+r$ és $\beta+r$ végpontokkal $\Longrightarrow$ $\lambda\big(g(A)\big)=|\alpha+r-(\beta+r)|=$ $=|\alpha-\beta|=\lambda(A)\Longrightarrow$ (4.1)

② ▶ Ha $A\subset\mathbb{R}$ tetszőleges akkor legyenek $A_i\subset\mathbb{R}$ $(i\in I\subset\mathbb{N})$ olyan korlátos intervallumok, melyekre $A\subset\bigcup_{i\in I}A_i \Longrightarrow g(A)\subset g\Big(\bigcup_{i\in I}A_i\Big)=\bigcup_{i\in I}g(A_i)\Longrightarrow$ $\lambda\big(g(A)\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{szubadd.}}}{\leqslant} \sum_{i\in I}\lambda\big(g(A_i)\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ ①}}{=} \sum_{i\in I}\lambda(A_i)\Longrightarrow\lambda\big(g(A)\big)$ alsó korlátja $\Sigma(A)$-nak ($\Sigma(A)$ definícióját lásd a 3.7. tételben) $\Longrightarrow\lambda\big(g(A)\big)\leqslant\inf\Sigma(A)=\lambda(A)$. Tehát

$$\lambda\big(g(A)\big)\leqslant\lambda(A). \tag{4.2}$$

A kapott eredményt alkalmazzuk A helyett $g(A)$-ra és g helyett g^{-1}-re ($g^{-1}(x) = x - r$) $\Longrightarrow \lambda\Big(\underbrace{g^{-1}\big(g(A)\big)}_{A}\Big) \leqslant \lambda\big(g(A)\big)$, melyből (4.2) miatt adódik (4.1).

③ ▶ Legyen $A \in \mathcal{L}$ és $T \subset \mathbb{R}$. Ekkor (4.1) miatt $\lambda\big(T \cap g(A)\big) + \lambda\big(T \setminus g(A)\big) = \lambda\Big(g^{-1}\big(T \cap g(A)\big)\Big) + \lambda\Big(g^{-1}\big(T \setminus g(A)\big)\Big) = \lambda\big(g^{-1}(T) \cap A\big) + \lambda\big(g^{-1}(T) \setminus A\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ A \in \mathcal{L}}}{=} \lambda\big(g^{-1}(T)\big) = \lambda(T) \Longrightarrow g(A) \in \mathcal{L}$. □

4.4. Tétel. *Az $\mathbb{R}$ minden megszámlálható részhalmaza Lebesgue-mérhető, továbbá Lebesgue-mértéke 0.*

Bizonyítás. Legyen $A \subset \mathbb{R}$ megszámlálható számosságú halmaz. Ha $A = \emptyset$ akkor $A \in \mathcal{L}$ és $\lambda(A) = 0$. Ha $A = \{x\}$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor A zárt intervallum, melynek a hossza 0. Így a 4.2. tétel szerint $A \in \mathcal{L}$ és $\lambda(A) = 0$. Ebből $A = \{x_i \in \mathbb{R} : i \in I \subset \mathbb{N}\}$ esetén $A = \bigcup\limits_{i \in I} \{x_i\} \in \mathcal{L}$, hiszen $\mathcal{L}$ σ-algebra, másrészt $\lambda(A) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{add.}}}{=} \sum\limits_{i \in I} \underbrace{\lambda(\{x_i\})}_{0} = 0$. □

Létezik kontinuum számosságú 0 Lebesgue-mértékű halmaz is, pl. az ún. Cantor-féle triadikus halmaz.

4.5. Definíció. A $[0, 1]$ intervallumból vonjuk ki a középső $\frac{1}{3}$ hosszúságú nyílt intervallumot. Az így kapott halmaz legyen C_1, amely két $\frac{1}{3}$ hosszúságú zárt intervallum. Ezek mindegyikéből vonjuk ki a középső $\frac{1}{3^2}$ hosszúságú nyílt intervallumot. Az így kapott halmaz legyen C_2, amely négy darab $\frac{1}{3^2}$ hosszúságú zárt intervallum. Ezt az eljárást folytatva, ha már definiáltuk a C_n halmazt, mely 2^n darab $\frac{1}{3^n}$ hosszúságú diszjunkt zárt intervallum, akkor azok mindegyikéből elhagyva a középső $\frac{1}{3^{n+1}}$ hosszú nyílt intervallumot, kapjuk a C_{n+1} halmazt. Legyen $C := \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. A C halmazt *Cantor-féle triadikus halmaznak* nevezzük.

4.6. Tétel. *A Cantor-féle triadikus halmaz kontinuum számosságú, Lebesgue-mérhető és Lebesgue-mértéke 0.*

Bizonyítás. ① ▶ $C \subset C_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow$ (külső mérték monoton) $\lambda(C) \leqslant \lambda(C_n) = \frac{2^n}{3^n}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Longrightarrow (n \to \infty)$ $\lambda(C) = 0 \Longrightarrow$ (3.5. megjegyzés) $C \in \mathcal{L}$.

② ▶ $x \in C$ pontosan akkor teljesül, ha az x végtelen triadikus tört alakjában a triadikus jegyek egyike sem 1. Minden $x \in C$ számhoz rendeljük azt a $0, y_1 y_2 \ldots$

diadikus törtet, melyre $y_n = \frac{x_n}{2}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ teljesül, ahol $0, x_1 x_2 \ldots$ az x végtelen triadikus tört alakja. Ez egy C-t $[0,1]$-re képező invertálható függvény. $\Longrightarrow$ C kontinuum számosságú. $\square$

A 3.6. tétel miatt a Lebesgue-mérték teljes, így $\lambda(C) = 0$ miatt a C minden részhalmaza Lebesgue-mérhető. De C kontinuum számosságú, ezért ugyanannyi részhalmaza van, mint $\mathbb{R}$-nek. Így felmerül a kérdés, hogy van-e egyáltalán olyan részhalmaza $\mathbb{R}$-nek, mely nem Lebesgue-mérhető? A válasz igen, pl. az ún. Vitali-féle halmaz.

4.7. Definíció. Legyen $Q := \big\{(x,y) : x, y \in [-1,1],\ x - y \in \mathbb{Q}\big\}$. A Q ekvivalencia reláció, így osztályozást generál a $[-1,1]$ intervallumon. A V halmaz tartalmazzon ezen osztályok mindegyikéből pontosan egy elemet. Ekkor a V halmazt *Vitali-féle halmaznak* nevezzük.

4.8. Tétel. *A Vitali-féle halmaz nem Lebesgue-mérhető.*

Bizonyítás. Legyen az $r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$ olyan sorozat, mely a $\mathbb{Q} \cap [-2,2]$ minden értékét pontosan egyszer veszi fel, és $g_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g_k(x) := x + r_k$ $(k \in \mathbb{N})$.

► $x \in [-1,1]$ esetén $\exists y \in V$, hogy $(x,y) \in Q \Longrightarrow |x - y| \leqslant 2$ és $x - y \in \mathbb{Q} \Longrightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}$, hogy $r_{k_0} = x - y \Longrightarrow x = y + r_{k_0} = g_{k_0}(y) \in g_{k_0}(V) \Longrightarrow$

$$[-1,1] \subset g_{k_0}(V) \Longrightarrow [-1,1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(V) \Longrightarrow 2 = \lambda\big([-1,1]\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{szubadd.}}}{\leqslant} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\big(g_k(V)\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{4.3. tétel}}}{=}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(V) = \lim_{n\to\infty} \lambda(V) \cdot n \Longrightarrow \lambda(V) > 0.$$

► Legyen $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$ és $y \in g_i(V) \cap g_j(V) \Longrightarrow \exists x_i, x_j \in V$, hogy $y = x_i + r_i = x_j + r_j \Longrightarrow x_i - x_j = r_j - r_i \in \mathbb{Q} \Longrightarrow (x_i, x_j) \in Q \Longrightarrow$ Mivel V a Q által generált minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy elemet tartalmaz, ezért $x_i = x_j \Longrightarrow r_i = r_j \Longrightarrow i = j$, ami ellentmondás $\Longrightarrow g_k(V)$, $k \in \mathbb{N}$ diszjunkt rendszer.

► Most tegyük fel, hogy $V \in \mathcal{L} \Longrightarrow$ 4.3. tétel miatt $g_k(V) \in \mathcal{L}$ minden $k \in \mathbb{N}$-re $\Longrightarrow$ $\bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(V) \in \mathcal{L}$.

Ha $x \in V$, akkor $g_k(x) = x + r_k \in [-3,3]$ minden $k \in \mathbb{N}$-re $\Longrightarrow g_k(V) \subset [-3,3]$ minden $k \in \mathbb{N}$-re $\Longrightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(V) \subset [-3,3]$.

Mindezekből $6 = \lambda\big([-3,3]\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{mon.}}}{\geqslant} \lambda\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} g_k(V)\Big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \sigma\text{-add.}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda\big(g_k(V)\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{4.3. tétel}}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda(V) = \lim_{n\to\infty} \lambda(V) \cdot n \Longrightarrow \lambda(V) = 0$ ami ellentmond $\lambda(V) > 0$-nak $\Longrightarrow V \notin \mathcal{L}$. $\square$

4.9. *Megjegyzés.* A $\mathbb{R}$ minden nyílt részhalmaza, és így az ezek által generált σ-algebra elemei (az ún. Borel-mérhető halmazok) is Lebesgue-mérhetőek. Mivel egy halmaz zárt, ha komplementere nyílt, ezért az $\mathbb{R}$ zárt részhalmazai is Lebesgue-mérhetőek.

5. Nyílt illetve Borel-mérhető halmazok

Legyenek $\mathbb{R}^n := \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^1 := \mathbb{R}$) és $\mathbb{R}_\mathrm{b}^n := \mathbb{R}_\mathrm{b} \times \cdots \times \mathbb{R}_\mathrm{b}$ ($\mathbb{R}_\mathrm{b}^1 := \mathbb{R}_\mathrm{b}$) n-szeres Descartes-szorzatok. Jelöljük az $\mathbb{R}^n$-beli nyílt halmazok rendszerét $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ módon. Az $\mathbb{R}^n$-beli nyíltságot a szokásos metrika szerint értjük.

A következő tételhez szükség van a sűrű halmaz fogalmára. Emlékeztetőül, $S \subset \mathbb{R}$ pontosan akkor sűrű halmaz $\mathbb{R}$-ben, ha $\mathbb{R}$ minden nyílt intervallumában végtelen sok S-beli elem van. Jól ismert, hogy például $\mathbb{Q}$ sűrű halmaz $\mathbb{R}$-ben.

5.1. Tétel. *Legyen $S \subset \mathbb{R}$ sűrű halmaz $\mathbb{R}$-ben, $n \in \mathbb{N}$,*

$$\mathcal{I}(S) := \{(a,b) : a, b \in S, a < b\},$$
$$\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, S) := \{V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n : V_i \in \mathcal{I}(S)\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Ekkor

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \Big\{\bigcup_{i \in I} T_i : I \text{ halmaz és } T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, S)\ \forall i \in I\Big\}.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{H} := \Big\{\bigcup_{i\in I} T_i : I \text{ halmaz és } T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, S)\ \forall i \in I\Big\}$ és $N \in \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$. Ha $N = \emptyset$, akkor $I = \emptyset$ választással kapjuk, hogy $N \in \mathcal{H}$. Ha $N \neq \emptyset$, akkor minden $x \in N$ esetén létezik $T_x \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, S)$, melyre $x \in T_x \subset N$ teljesül. $\Longrightarrow \bigcup_{x\in N} T_x \subset N$. Másrészt, ha $x_0 \in N$, akkor $x_0 \in T_{x_0} \Longrightarrow x_0 \in \bigcup_{x \in N} T_x \Longrightarrow N \subset \subset \bigcup_{x\in N} T_x \Longrightarrow N = \bigcup_{x \in N} T_x \Longrightarrow N \in \mathcal{H} \Longrightarrow \mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{H}$. Mivel a fordított tartalmazás triviálisan teljesül, így kapjuk az állítást. $\square$

5.2. Tétel. *Az előző tétel jelöléseivel*

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \Big\{\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i : T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\ \forall i \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Bizonyítás. $\mathcal{I}(\mathbb{Q})$ megszámlálhatóan végtelen számosságú, ezért $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n,\mathbb{Q})$ is az. Így az 5.1. tételből

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)=\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}T_i : T_i\in\mathcal{T}(\mathbb{R}^n,\mathbb{Q})\ \forall i\in\mathbb{N}\right\}\subset\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}T_i : T_i\in\mathcal{T}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\ \forall i\in\mathbb{N}\right\}.$$

Másrészt szintén az 5.1. tétel miatt

$$\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}T_i : T_i\in\mathcal{T}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\ \forall i\in\mathbb{N}\right\}\subset\mathcal{N}(\mathbb{R}^n),$$

melyből kapjuk az állítást. □

Az 5.1. tétel mintájára lehetőségünk van az $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$-beli nyílt halmazok definiálására metrika nélkül, topológikus úton.

5.3. Definíció. Legyen $S\subset\mathbb{R}$ sűrű halmaz $\mathbb{R}$-ben, $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_{\mathrm{b}}(S)&:=\big\{(a,b),(c,\infty],[-\infty,d) : a,b,c,d\in S,\ a<b\big\},\\ \mathcal{T}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}},S)&:=\{V_1\times V_2\times\cdots\times V_n : V_i\in\mathcal{I}_{\mathrm{b}}(S)\ \forall i=1,2,\ldots,n\}\text{ és}\\ \mathcal{N}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})&:=\left\{\bigcup_{i\in I}T_i : I\text{ halmaz és } T_i\in\mathcal{T}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}},S)\ \forall i\in I\right\}.\end{aligned}$$

Ekkor az $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$ elemeit az $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ *nyílt halmazainak* nevezzük. Egy $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$-beli halmazt *zártnak* nevezünk, ha komplementere nyílt.

A következő tétel az 5.2. tételhez hasonlóan bizonyítható.

5.4. Tétel. *Az előző definíció jelöléseivel*

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})=\left\{\bigcup_{i=1}^{\infty}T_i : T_i\in\mathcal{T}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}},\mathbb{R})\ \forall i\in\mathbb{N}\right\}.$$

5.5. *Megjegyzés.* $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$ egyértelműen meghatározott, azaz független az S választásától. Ez abból következik, hogy ha $S,S^*\subset\mathbb{R}$ sűrű halmazok $\mathbb{R}$-ben, és $V\in\mathcal{I}_{\mathrm{b}}(S^*)$, akkor léteznek $V^{(k)}\in\mathcal{I}_{\mathrm{b}}(S)$ $(k\in\mathbb{N})$ halmazok, hogy $V=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}V^{(k)}$.

5.6. *Megjegyzés.* $\emptyset,\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}\in\mathcal{N}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$.

5.7. Definíció. Legyen X egy halmaz és $\mathcal{H}\subset\mathcal{P}(X)$. A $\mathcal{H}$-t tartalmazó X-ből származó összes σ-algebra metszetét (mely nyilván maga is σ-algebra) a $\mathcal{H}$ által *generált σ-algebrának* nevezzük. Jele: $\sigma(\mathcal{H})$.

A mértékelméletben kitüntetett szerepe van a nyílt halmazok által generált σ-algebrának.

5.8. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ nyílt halmazai által generált σ-algebrát $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ módon jelöljük, és elemeit az $\mathbb{R}^n$ *Borel-mérhető halmazainak* nevezzük. Az $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmazai által generált σ-algebrát $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$ módon jelöljük, és elemeit az $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ *Borel-mérhető halmazainak* nevezzük.

6. Mérhető függvények

6.1. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A})$ és $(Y, \mathcal{B})$ mérhető terek és $f\colon A \to Y$ $(A \subset X)$. Az f *$(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mérhető függvény*, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B}$.

6.2. *Megjegyzés.* Az előző definíció jelöléseivel, ha f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mérhető függvény, akkor $Y \in \mathcal{B}$ miatt $A = f^{-1}(Y) \in \mathcal{A}$, azaz f értelmezési tartománya mérhető halmaz.

6.3. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f\colon A \to \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ $(A \subset X)$. Az f *$\mathcal{A}$-mérhető függvény*, ha $\big(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})\big)$-mérhető, azaz $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$. Ha μ az $\mathcal{A}$-n értelmezett mérték és f $\mathcal{A}$-mérhető, akkor azt is mondjuk, hogy f *μ-mérhető*.

6.4. Definíció. Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ $(H \subset \mathbb{R}^k_{\mathrm{b}})$. Az f *Borel-mérhető függvény*, ha $\mathcal{B}(\mathbb{R}^k_{\mathrm{b}})$-mérhető, azaz, ha $f^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k_{\mathrm{b}})\ \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$.

Definíció szerint egy függvény $\mathcal{A}$-mérhetőségéhez az $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmazai által generált σ-algebra elemeit kell megvizsgálni. A következő tétel azt állítja, hogy valójában elég csak az $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmazait vizsgálni. Ehhez szükségünk lesz egy lemmára.

6.5. Lemma. *Ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $A \in \mathcal{A}$, Y egy halmaz, $f\colon A \to Y$ és*

$$\mathcal{B} := \{B \subset Y : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\},$$

akkor $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér.

Bizonyítás. ▶ $f^{-1}(Y) = A \in \mathcal{A} \Longrightarrow Y \in \mathcal{B}$.
▶ $B \in \mathcal{B}$ esetén $f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Longrightarrow f^{-1}(\overline{B}) = f^{-1}(Y \setminus B) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = A \setminus \setminus f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Longrightarrow \overline{B} \in \mathcal{B}$.
▶ $B_i \in \mathcal{B}$ $(i \in \mathbb{N})$ esetén $f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N}) \Longrightarrow f^{-1}\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\Big) = \bigcup_{i=1}^{\infty} f^{-1}(B_i) \in \mathcal{A}$ $\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$. Mindezekből következik az állítás. $\square$

6.6. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f\colon A \to \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ $(A \subset X)$. Az f $\mathcal{A}$-mérhető $\iff f^{-1}(H) \in \mathcal{A}$ $\forall H \subset \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmazra.*

Bizonyítás. ▶ „$\Rightarrow$" Minden $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$-beli nyílt halmaz eleme $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$-nek, így ez az irány triviális.

▶ „$\Leftarrow$" Az $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmaz $\implies f^{-1}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}) = A \in \mathcal{A} \implies$ a 6.5. lemma miatt

$$\mathscr{B} := \{B \subset \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}} : f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$$

σ-algebra. Legyen $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}) \implies f^{-1}(H) \in \mathcal{A} \implies H \in \mathscr{B} \implies \mathcal{N}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}) \subset \mathscr{B}$, azaz $\mathscr{B}$ olyan σ-algebra, mely tartalmazza $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$-t $\implies \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}) = \sigma\big(\mathcal{N}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})\big) \subset \mathscr{B} \implies B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}})$ esetén $B \in \mathscr{B} \implies f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \implies f$ $\mathcal{A}$-mérhető. □

6.7. Definíció. Legyen $f\colon H \to \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ $(H \subset \mathbb{R}^k_{\mathrm{b}})$ és $x_0 \in H$. Az f x_0-ban *folytonos*, ha minden $f(x_0)$-át tartalmazó $\mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$-beli nyílt U halmaz esetén van olyan x_0-át tartalmazó $\mathbb{R}^k_{\mathrm{b}}$-beli nyílt V halmaz, melyre $f(V) \subset U$ teljesül. Az f folytonos, ha H minden pontjában folytonos.

6.8. Tétel. *Legyen $H \subset \mathbb{R}^k_{\mathrm{b}}$ nyílt és $f\colon H \to \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$. Ekkor f folytonos $\iff f^{-1}(A)$ nyílt $\forall A \subset \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmaz esetén.*

Bizonyítás. ▶ „$\Rightarrow$" Legyen $A \subset \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmaz. Ha $f^{-1}(A) = \emptyset$, akkor kész. Ha $f^{-1}(A) \neq \emptyset$, akkor legyen $x \in f^{-1}(A)$, azaz $f(x) \in A \implies$ folyt. miatt $\exists V_x \subset \mathbb{R}^k_{\mathrm{b}}$ nyílt halmaz, hogy $x \in V_x$ és $f(V_x) \subset A \implies f(V_x \cap H) \subset A \implies V_x \cap H \subset H$ miatt $x \in V_x \cap H \subset f^{-1}(A)$. Így $f^{-1}(A) \subset \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(A)} (V_x \cap H) \subset \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(A)} f^{-1}(A) = f^{-1}(A)$ $\implies f^{-1}(A) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(A)} (V_x \cap H) \implies f^{-1}(A)$ nyílt $\implies$ állítás.

▶ „$\Leftarrow$" Legyen $x \in H$ és $A \subset \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ olyan nyílt halmaz, melyre $f(x) \in A$. Ekkor $V := f^{-1}(A)$ választással V nyílt, $x \in V$ és $f(V) \subset A \implies f$ x-ben folytonos. □

6.9. Tétel. *Ha $H \subset \mathbb{R}^k_{\mathrm{b}}$ nyílt és $f\colon H \to \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ folytonos $\implies f$ Borel-mérhető.*

Bizonyítás. $A \subset \mathbb{R}^n_{\mathrm{b}}$ nyílt halmaz esetén a 6.8. tétel miatt $f^{-1}(A)$ nyílt $\implies f^{-1}(A) \in$ $\in \mathcal{B}(\mathbb{R}^k_{\mathrm{b}}) \implies$ 6.6. tétel miatt f Borel-mérhető. □

A következőkben gyakran fogunk találkozni a „majdnem mindenütt" fogalommal.

6.10. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $H, L \subset X$, $\ell\colon L \to \{\text{igaz}, \text{hamis}\}$ ún. *logikai függvény*, és legyen

$$H(\ell) := H \cap \{x \in L : \ell(x) = \text{igaz}\},$$

azaz $H(\ell)$ a H azon pontjainak halmaza, melyben ℓ értelmezett és értéke igaz. Azt mondjuk, hogy ℓ *μ-majdnem mindenütt* teljesül a H halmazon, ha

$$H \setminus H(\ell) \in \mathcal{A} \quad \text{és} \quad \mu\big(H \setminus H(\ell)\big) = 0,$$

azaz a H azon pontjainak halmaza, melyben ℓ nincs értelmezve vagy az értéke hamis, mérhető és mértéke 0. Ha ℓ μ-majdnem mindenütt teljesül az X halmazon, akkor azt mondjuk, hogy ℓ μ-majdnem mindenütt (vagy röviden majdnem mindenütt) teljesül. Rövidítése: *μ-m.m.* illetve *m.m.*

Például legyen $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := x^2$, $g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $g(x) := \frac{1}{x}$ és

$$\ell\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad \ell(x) := \begin{cases} \text{igaz}, & \text{ha } f(x) < g(x), \\ \text{hamis}, & \text{ha } f(x) \geqslant g(x). \end{cases}$$

Az ℓ logikai függvényt a továbbiakban $f < g$ módon jelöljük. Ekkor $H := [0, 1]$ esetén $H(f < g) = (0, 1) \implies H \setminus H(f < g) = \{0, 1\} \implies f < g$ λ-m.m. $[0, 1]$-en, ahol λ a Lebesgue-mérték.

6.11. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér, $(Y, \mathcal{B})$ mérhető tér, $f\colon A \to Y$ $(A \subset X)$ és $g\colon H \to Y$ $(H \subset X)$. Ha g $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mérhető és $f = g$ m.m. $\implies$ f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mérhető.*

6.12. Tétel. *Legyenek $(X, \mathcal{A})$, $(Y, \mathcal{B})$, $(Z, \mathcal{C})$ mérhető terek, $f\colon A \to Y$ $(A \subset X)$ és $g\colon B \to Z$ $(B \subset Y)$. Ha f $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-mérhető és g $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$-mérhető $\implies$ $g \circ f$ $(\mathcal{A}, \mathcal{C})$-mérhető.*

6.13. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér, $f\colon A \to \mathbb{R}_b$ $(A \subset X)$ és $g\colon B \to \mathbb{R}_b$ $(B \subset X)$. Ha f és g $\mathcal{A}$-mérhetőek $\implies$ cf $(c \in \mathbb{R}_b)$, $|f|$, $1/f$, $\max\{f, g\}$, $f + g$, fg függvények $\mathcal{A}$-mérhetőek.*

6.14. Tétel. *Legyen* $(X, \mathcal{A})$ *mérhető tér,* $f\colon A \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$ $(A \in \mathcal{A})$ *és* $S \subset \mathbb{R}$ *sűrű* $\mathbb{R}$*-ben. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

① f $\mathcal{A}$*-mérhető,*

② $X(f > a) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in S$,

③ $X(f < a) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in S$,

④ $X(f \geqslant a) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in S$,

⑤ $X(f \leqslant a) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in S$.

Ha ①–⑤ közül valamelyik teljesül, akkor $X(f = a) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in S$.

Bizonyítás. ▶ Legyenek $x, y, z \in \mathbb{Q}$, $x < y$. Ekkor $\exists x_n, y_n, z_n \in S$, $x_n < y_n$ $(n \in \mathbb{N})$, melyekre teljesülnek a következők:

1) $(x, \infty] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (x_n, \infty]$, azaz $f^{-1}\big((x, \infty]\big) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} f^{-1}\big((x_n, \infty]\big)$

2) $[-\infty, z) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} [-\infty, z_n] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{(z_n, \infty]}$, azaz $f^{-1}\big([-\infty, z)\big) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \overline{f^{-1}\big((z_n, \infty]\big)}$

3) $(x, y) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (x_n, y_n] = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \big[(x_n, \infty] \setminus (y_n, \infty]\big]$, azaz $f^{-1}\big((x, y)\big) = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Big[f^{-1}\big((x_n, \infty]\big) \setminus$ $\setminus f^{-1}\big((y_n, \infty]\big)\Big]$

Ha ② teljesül, akkor $X(f > a) = f^{-1}\big((a, \infty]\big) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in S$, így az *1), 2), 3)* pontok miatt, ha $T \in \mathcal{I}_\mathrm{b}(\mathbb{R})$, akkor $f^{-1}(T) \in \mathcal{A}$. Másrészt $H \in \mathcal{N}(\mathbb{R}_\mathrm{b})$ esetén $\exists T_i \in$ $\in \mathcal{I}_\mathrm{b}(\mathbb{R})$ $(i \in \mathbb{N})$, hogy $H = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} T_i$, azaz $f^{-1}(H) = \bigcup\limits_{i \in \mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}(T_i)}_{\in \mathcal{A}} \in \mathcal{A} \Longrightarrow$ 6.6. tétel miatt f $\mathcal{A}$-mérhető $\Longrightarrow$ „② ⇒ ①”.

▶ $X(f > a) = f^{-1}\big((a, \infty]\big)$ és $(a, \infty] \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_\mathrm{b}) \Longrightarrow$ „① ⇒ ②”.

▶ Az „① ⇔ ③” hasonlóan bizonyítható, mint az „① ⇔ ②”.

▶ $X(f > a) = A \setminus X(f \leqslant a) \Longrightarrow$ „② ⇔ ⑤”. Hasonlóan teljesül „③ ⇔ ④”.

▶ Ha ①–⑤ közül valamelyik teljesül, akkor az előbbiek miatt ④ és ⑤ is igaz $\Longrightarrow$ $X(f = a) = X(f \geqslant a) \cap X(f \leqslant a) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in S$. □

7. Mérhető függvények sorozatai

7.1. Tétel. *Legyen* $(X, \mathcal{A})$ *mérhető tér,* $f_n\colon X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A}$*-mérhető függvények és* $A := \{x \in X : f_n(x)$ *konvergens*$\} \Longrightarrow f\colon A \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ $\mathcal{A}$*-mérhető.*

7.2. *Megjegyzés.* A 7.1. tétel és a 6.2. megjegyzés miatt, ha $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f_n \colon X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A}$-mérhető függvények, akkor $\{x \in X : f_n(x) \text{ konvergens}\} \in \mathcal{A}$, azaz a konvergenciatartomány mérhető.

7.3. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A})$ mérhető tér és $f_n \colon X \to \mathbb{R}_b$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha az f_n-ek $\mathcal{A}$-mérhetőek $\forall n \in \mathbb{N}$-re, akkor $\sup\limits_n f_n$, $\inf\limits_n f_n$, $\overline{\lim} f_n$ és $\underline{\lim} f_n$ is $\mathcal{A}$-mérhetőek.*

7.4. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ teljes mértéktér és $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}_b$ $(n \in \mathbb{N})$. Ha az f_n-ek μ-mérhetőek $\forall n \in \mathbb{N}$-re és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ m.m. $\Longrightarrow$ f μ-mérhető.*

Bizonyítás. Legyen $A := X \setminus X\big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f\big)$. Ekkor $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0$. Ha $x \in \overline{A} = X\big(\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f\big) \Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \Longrightarrow \overline{\lim} f_n(x) = f(x) \Longrightarrow x \in$ $\in X\big(\overline{\lim} f_n = f\big) \Longrightarrow \overline{A} \subset X\big(\overline{\lim} f_n = f\big) \Longrightarrow X \setminus X\big(\overline{\lim} f_n = f\big) \subset A \Longrightarrow$ $\mu\Big(X \setminus X\big(\overline{\lim} f_n = f\big)\Big) = 0 \Longrightarrow \overline{\lim} f_n = f$ m.m. $\Longrightarrow$ a 7.3. tétel szerint $\overline{\lim} f_n$ μ-mérhető, így a 6.11. tétel miatt f is μ-mérhető. □

7.5. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-mérhető függvények. Azt mondjuk, hogy *f_n μ-mértékben konvergál f-hez*, ha

$$\lim_{n\to\infty} \mu\Big(X\big(|f_n - f| > \varepsilon\big)\Big) = 0 \quad \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+.$$

Ez a definíció korrekt, hiszen $X\big(|f_n - f| > \varepsilon\big) \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ és $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ esetén.

7.6. Tétel (Lebesgue-tétel)**.** *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ véges mértéktér, $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$ $(n \in$ $\in \mathbb{N})$ μ-mérhető függvények és $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ m.m. $\Longrightarrow$ f_n μ-mértékben konvergál f-hez.*

7.7. Tétel (Riesz-féle kiválasztási tétel)**.** *Ha $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f, f_n \colon X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-mérhető függvények és f_n μ-mértékben konvergál f-hez $\Longrightarrow$ f_n-nek létezik olyan f_{n_k} részsorozata, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} f_{n_k} = f$ m.m.*

7.8. Definíció. A véges értékkészletű függvényeket *egyszerű függvényeknek* nevezzük. Speciálisan, ha X egy halmaz és $A \subset X$, akkor a

$$\chi_A \colon X \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvényt az A *indikátorának* nevezzük.

7.9. Tétel. *Legyen* $(X, \mathcal{A})$ *mérhető tér és* $A \subset X$*. Ekkor* χ_A $\mathcal{A}$*-mérhető* $\iff$ $A \in \mathcal{A}$*.*

Bizonyítás. ► „$\Rightarrow$” $A = X(\chi_A = 1) \in \mathcal{A}$.
► „$\Leftarrow$” $X(\chi_A < a) = \emptyset$, ha $a \leqslant 0$, $X(\chi_A < a) = \overline{A}$, ha $0 < a \leqslant 1$ és $X(\chi_A < a) = X$, ha $a > 1 \implies X(\chi_A < a) \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R} \implies \chi_A$ $\mathcal{A}$-mérhető. □

7.10. *Megjegyzés.* Ha $s\colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$ egyszerű függvény és $R_s = \{y_1, \dots, y_n\}$, akkor

$$s = \sum_{i=1}^{n} y_i \chi_{A_i},$$

ahol $A_i = X(s = y_i)$, azaz s előáll véges sok indikátor lineáris kombinációjaként. Ha s mérhető függvény, akkor az A_i $(i = 1, \dots, n)$ halmazok mérhetőek, így a χ_{A_i} $(i = 1, \dots, n)$ indikátorok is mérhetőek. Az állítás fordítottja is teljesül, azaz véges sok mérhető indikátor lineáris kombinációja mérhető egyszerű függvény.

7.11. Tétel (Approximációs tétel)**.** *Ha* $(X, \mathcal{A})$ *mérhető tér és* $f\colon X \to [0, \infty]$ $\mathcal{A}$*-mérhető* $\implies$ *léteznek* $s_n\colon X \to [0, \infty)$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{A}$*-mérhető egyszerű függvények, melyekre* $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant \dots$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$ *teljesül.*

Bizonyítás. Legyen $s_0\colon X \to [0, \infty)$, $s_0 := 0$,

$$A_n := X\Big(f \geqslant s_{n-1} + \frac{1}{n}\Big) \quad \text{és} \quad s_n := s_{n-1} + \frac{1}{n}\chi_{A_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor az s_n függvények triviálisan olyan $\mathcal{A}$-mérhető egyszerű függvények, melyekre $s_1 \leqslant s_2 \leqslant s_3 \leqslant \dots$ teljesül. Be fogjuk látni, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = f$. Legyen $x \in X$.

Ha $f(x) = \infty \implies x \in A_n$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies \chi_{A_n}(x) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies s_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \implies$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = \infty = f(x)$.

Ha $f(x) < \infty$, akkor belátjuk, hogy végtelen sok n-re $x \notin A_n$. Ezzel ellentétben tegyük fel, hogy $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $x \in A_n$ $\forall n \geqslant n_0$. Ebből azt kapjuk, hogy

$$s_n(x) = s_{n_0-1}(x) + \sum_{i=n_0}^{n} \frac{1}{i} \quad \forall n \geqslant n_0, \tag{7.1}$$

így $n \geqslant n_0$ esetén $\infty > f(x) \underset{\substack{\Uparrow \\ x\in A_n}}{\geqslant} s_{n-1}(x) + \frac{1}{n} \underset{\substack{\Uparrow \\ \chi_{A_n}(x)=1}}{=} s_n(x) \underset{\substack{\Uparrow \\ (7.1)}}{=} s_{n_0-1}(x) + \sum\limits_{i=n_0}^{n} \frac{1}{i} \Longrightarrow$ $\sum\limits_{i=n_0}^{n} \frac{1}{i}$ felülről korlátos, ami nem teljesül $\Longrightarrow$ végtelen sok n-re $x \notin A_n \Longrightarrow$

$$f(x) < s_{n-1}(x) + \frac{1}{n} \quad \text{végtelen sok } n\text{-re.} \tag{7.2}$$

Ezután teljes indukcióval belátjuk, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$f(x) \geqslant s_{n-1}(x). \tag{7.3}$$

$n = 1$-re triviális. Tegyük fel, hogy $n = k$-ra teljesül, de $n = k + 1$-re nem teljesül (7.3). Ekkor $f(x) < s_k(x) = s_{k-1}(x) + \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{ind. felt.}}}{\leqslant} f(x) + \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) \Longrightarrow 0 <$ $< \frac{1}{k}\chi_{A_k}(x) \Longrightarrow \chi_{A_k}(x) = 1$, azaz $x \in A_k$. Ezt visszaírva az előző egyenlőtlenségbe: $f(x) < s_{k-1}(x) + \frac{1}{k}$, azaz $x \notin A_k$, ami ellentmondás. Ezzel (7.3) bizonyított. A (7.2) és (7.3) egyenlőtlenségek alapján

$$0 \leqslant f(x) - s_{n-1}(x) < \frac{1}{n} \quad \text{végtelen sok } n\text{-re.}$$

Így létezik olyan $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ pozitív egészekből álló számsorozat, hogy $0 \leqslant f(x) - s_{n_k-1}(x) < \frac{1}{n_k}$ $\forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} \big(f(x) - s_{n_k-1}(x)\big) = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{k\to\infty} s_{n_k}(x) =$ $= f(x)$. Másrészt $s_n(x)$ monoton növekedő, így nem lehet egynél több torlódási pontja, melyből $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$. □

8. Nemnegatív mérhető függvények integrálja

8.1. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to [0, \infty]$ μ-mérhető és

$$D_n := \big\{(y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant y_1 < y_2 < \dots < y_n\big\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in D_n$, akkor legyenek

$$\begin{aligned} A_i &:= X(y_i \leqslant f < y_{i+1}) \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (n \geqslant 2), \\ A_n &:= X(y_n \leqslant f). \end{aligned}$$

Az f-nek y-hoz tartozó *integrálközelítő összege*

$$s(f, y) := \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i).$$

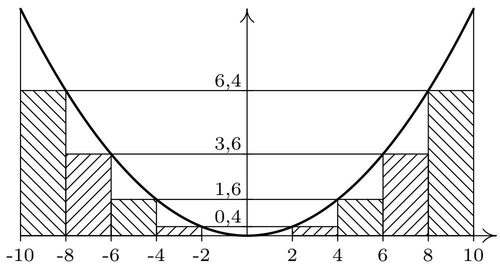
Az *f integrálja*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) := \sup\big\{s(f, y) : n \in \mathbb{N}, y \in D_n\big\}.$$

8.2. *Megjegyzés.* A beosztás finomításával az integrálközelítő összeg nem csökken, így minden határon túl finomodó beosztássorozat esetén az integrálközelítő összegek sorozatának határértéke a pontos felső korlátjával egyezik meg.

Minden nemnegatív mérhető függvénynek létezik integrálja és értéke $[0,\infty]$-beli.

Legyen például $(X,\mathcal{A},\mu)$ a Lebesgue-mértéktér $[-10,10]$-hez tartozó altere (lásd 9. oldal), és $f\colon [-10,10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{10}$. Ekkor $n = 4$, $y_1 = 0{,}4$, $y_2 = 1{,}6$, $y_3 = 3{,}6$ és $y_4 = 6,4$ választással $A_1 = (-4,-2] \cup [2,4)$, $A_2 = (-6,-4] \cup [4,6)$, $A_3 = (-8,-6] \cup [6,8)$, $A_4 = [-10,-8] \cup [8,10]$.



Így $\mu(A_i) = 4\ \forall i = 1,2,3,4$, melyből $s(f,y) = 4\cdot 0{,}4 + 4\cdot 1{,}6 + 4\cdot 3{,}6 + 4\cdot 6{,}4 = 48$.

8.3. *Megjegyzés.* A definícióban szereplő A_i halmazok a legbővebb olyan diszjunkt halmazok, melyek mérhetőek és az $y_i \leqslant f(x)\ \forall x \in A_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ feltételnek eleget tesznek. Így

$$I_f := \left\{ \sum_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i) \ : \ \begin{array}{l} n \in \mathbb{N},\ y_i \in [0,\infty)\ (i = 1,\ldots,n), \\ A_i \in \mathcal{A}\ (i = 1,\ldots,n) \text{ diszjunktak} \\ \text{és } y_i \leqslant f(x)\ \forall x \in A_i\ (i = 1,\ldots,n) \end{array} \right\}.$$

jelöléssel

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \sup I_f.$$

8.4. Definíció. Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktér, $f\colon X \to [0,\infty]$ μ-mérhető és $A \in \mathcal{A}$. Az *f A feletti integrálja*

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \int_A f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) := \int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Az előző definícióban $f\chi_A$ μ-mérhető nemnegatív függvény, így annak integrálja definiált. Másrészt $\chi_X \equiv 1 \Longrightarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.

8.5. Tétel. *Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktér, $f\colon X \to [0,\infty]$ μ-mérhető és $A \in \mathcal{A}$. Ha* $\mu(A) = 0 \Longrightarrow \int_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Bizonyítás. Legyenek $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0,\infty)$ $(i = 1,\dots,n)$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1,\dots,n)$ diszjunktak, és $y_i \leqslant f(x)\chi_A(x)$ $\forall x \in A_i$ $(i = 1,\dots,n)$. Ekkor $y_i > 0$ és $x \in A_i$ esetén $0 < y_i \leqslant f(x)\chi_A(x)$, azaz $\chi_A(x) > 0$, így $x \in A$. Tehát $y_i > 0$ esetén $A_i \subset A$, így $\mu(A_i) \leqslant \mu(A) = 0$ miatt $\mu(A_i) = 0 \implies \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\mu(A_i) = 0 \implies I_{f\chi_A} = \{0\} \implies$ $\int\limits_A f\,\mathrm{d}\mu = \int f\chi_A\,\mathrm{d}\mu = \sup I_{f\chi_A} = 0.$ □

8.6. Tétel. *Legyen $(X,\mathcal{A},\mu)$ mértéktér, $f,g\colon X \to [0,\infty]$ μ-mérhető függvények. Ekkor*

① (monotonitás) $f \leqslant g$ *m.m.* $\implies \int f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g\,\mathrm{d}\mu$

② $f = g$ *m.m.* $\implies \int f\,\mathrm{d}\mu = \int g\,\mathrm{d}\mu$

③ (Markov-egyenlőtlenség) $\alpha \in [0,\infty) \implies \int f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \alpha\mu\big(X(f \geqslant \alpha)\big)$

④ $\int f\,\mathrm{d}\mu < \infty \implies f < \infty$ *m.m.*

⑤ $\int f\,\mathrm{d}\mu = 0 \iff f = 0$ *m.m.*

⑥ (pozitív homogenitás) $\alpha \in [0,\infty) \implies \int \alpha f\,\mathrm{d}\mu = \alpha\int f\,\mathrm{d}\mu$

Bizonyítás. ▶ ① feltételével és $H := X(f > g)$ jelöléssel $H \in \mathcal{A}$ és $\mu(H) = 0$. Legyenek $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0,\infty)$ $(i = 1,\dots,n)$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1,\dots,n)$ diszjunktak, és $y_i \leqslant f(x)$ $\forall x \in A_i$ $(i = 1,\dots,n)$. Ekkor $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\mu(A_i) \in I_f$.

Másrészt $A_i \setminus H \in \mathcal{A}$ $(i = 1,\dots,n)$ diszjunktak, és $y_i \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ $\forall x \in A_i \setminus H$ $(i = 1,\dots,n) \implies \sum\limits_{i=1}^{n} y_i\mu(A_i \setminus H) \in I_g$. De $\mu(A_i) = \mu(A_i \setminus H) + \underbrace{\mu(A_i \cap H)}_{0} \implies$ $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i\mu(A_i) \in I_g \implies I_f \subset I_g \implies \sup I_f \leqslant \sup I_g \implies$ ①.

▶ ② feltételével, $X(f < g) \subset X(f \neq g)$ miatt $\mu\big(X(f < g)\big) \leqslant \mu\big(X(f \neq g)\big) = 0$ $\implies \mu\big(X(f < g)\big) = 0 \implies f \geqslant g$ m.m. $\implies$ (① miatt) $\int f\,\mathrm{d}\mu \geqslant \int g\,\mathrm{d}\mu$. Hasonlóan bizonyítható, hogy $\int f\,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g\,\mathrm{d}\mu \implies$ ②.

▶ $n = 1$, $y_1 = \alpha$ és $A_1 = X(\alpha \leqslant f)$ választással $\alpha\mu\big(X(\alpha \leqslant f)\big) \in I_f \implies$ ③.

▶ Ha $K := \int f\,\mathrm{d}\mu < \infty \implies \mathbb{R} \ni K \underset{\substack{\Uparrow \\ ③}}{\geqslant} n\mu\big(X(f \geqslant n)\big) \geqslant n\mu\big(X(f = \infty)\big)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\implies \mu\big(X(f = \infty)\big) = 0 \implies$ ④.

▶ $0 = \int f\,\mathrm{d}\mu$ esetén $0 \underset{\substack{\Uparrow \\ ③}}{\geqslant} \frac{1}{n}\mu\big(X(f \geqslant \frac{1}{n})\big)$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies \mu\big(X(f \geqslant \frac{1}{n})\big) = 0$ $\forall n \in \mathbb{N} \implies$

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mu\big(X(f \geqslant \tfrac{1}{n})\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{folyt.}}}{=} \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} X(f \geqslant \tfrac{1}{n})\Big) = \mu\big(X(f > 0)\big) = \mu\big(X(f \neq 0)\big) \implies$$

$f = 0$ m.m.

Ha $f = 0$ m.m. $\Longrightarrow A := X(f \neq 0)$ jelöléssel $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0 \Longrightarrow f = f\chi_A$ és a 8.5. tétel miatt $\int f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$. Ezzel ⑤ bizonyított.

► Legyen $n \in \mathbb{N}$, $y_i \in [0, \infty)$ $(i = 1, \dots, n)$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i = 1, \dots, n)$ diszjunktak, és $y_i \leqslant f(x)$ $\forall x \in A_i$ $(i = 1, \dots, n) \Longrightarrow \alpha y_i \leqslant \alpha f(x)$ $\forall x \in A_i$ $(i = 1, \dots, n)$ $\Longrightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \mu(A_i) \in I_f$ és $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha y_i \mu(A_i) \in I_{\alpha f} \Longrightarrow \alpha I_f := \{\alpha x : x \in I_f\} \subset I_{\alpha f} \Longrightarrow$ $\alpha \int f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \sup I_f = \sup \alpha I_f \leqslant \sup I_{\alpha f} = \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow$

$$\alpha \int f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu \quad \forall \alpha \in [0, \infty). \tag{8.1}$$

Ha $\alpha > 0$, akkor $\beta := \frac{1}{\alpha}$ és $g := \alpha f$ jelöléssel (8.1) miatt $\beta \int g \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int \beta g \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow$ $\frac{1}{\alpha} \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int \frac{1}{\alpha} \alpha f \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu$, így (8.1) miatt ⑥ teljesül.
Ha $\alpha = 0$, akkor ⑤ miatt teljesül ⑥. Ezzel ⑥ bizonyított. □

8.7. Tétel (Beppo Levi monoton konvergencia tétele). *Ha az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f_n \colon X \to [0, \infty]$ μ-mérhető függvények $\forall n \in \mathbb{N}$-re és $f_1 \leqslant f_2 \leqslant \dots$, akkor*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

8.8. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f_i \colon X \to [0, \infty]$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ μ-mérhető függvények. Ekkor*

$$\sum_{i\in I} \int f_i \,\mathrm{d}\mu = \int \Big(\sum_{i\in I} f_i\Big) \,\mathrm{d}\mu.$$

9. Integrálható függvények

Tetszőleges mérhető függvény integráljának bevezetéséhez szükségünk lesz a függvény pozitív ill. negatív részének fogalmára.

9.1. Definíció. Ha $f \colon X \to \mathbb{R}_{\mathrm{b}}$, akkor *$f$ pozitív része* $f^+ := f\chi_{X(f>0)}$ illetve *f negatív része* $f^- := -f\chi_{X(f<0)}$.

9.2. Lemma. *Legyen $f, g \colon X \to \mathbb{R}_{\mathrm{b}}$. Ekkor*

① $f = f^+ - f^-$, $\quad |f| = f^+ + f^-$,
② $f^+ = \frac{1}{2}(|f| + f)$, $\quad f^- = \frac{1}{2}(|f| - f)$,
③ $(f + g)^+ \leqslant f^+ + g^+$, $\quad (f + g)^- \leqslant f^- + g^-$.

Bizonyítás. ► ① triviálisan teljesül az f^+ és f^- definíciójából.

► ② következik ①-ből.

► $(f+g)^+ \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{②}}}{=} \frac{1}{2}(|f+g|+f+g) \leqslant \frac{1}{2}(|f|+|g|+f+g) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{②}}}{=} f^+ + g^+$. Hasonlóan $(f+g)^- \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{②}}}{=} \frac{1}{2}(|f+g|-f-g) \leqslant \frac{1}{2}(|f|+|g|-f-g) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{②}}}{=} f^- + g^- \Longrightarrow$ ③. □

9.3. Lemma. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f \colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$. Az f μ-mérhető $\Longleftrightarrow$ f^+ és f^- μ-mérhetőek.*

Bizonyítás. Az állítás a 9.2. lemmából és a 6.13. tételből következik. □

9.4. Lemma. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f, g \colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$ μ-mérhető függvények. Az $f = g$ m.m. $\Longleftrightarrow$ $f^+ = g^+$ m.m. és $f^- = g^-$ m.m.*

Bizonyítás. f és g μ-mérhetősége miatt f^+, f^-, g^+ és g^- is μ-mérhetőek $\Longrightarrow X(f = g) \in \mathcal{A}$, $X(f \neq g) \in \mathcal{A}$, $X(f^+ = g^+) \in \mathcal{A}$, $X(f^- = g^-) \in \mathcal{A}$, $X(f^+ \neq g^+) \in \mathcal{A}$, $X(f^- \neq g^-) \in \mathcal{A}$.

► „⇒” $x \in X(f = g)$ esetén $f(x) = g(x) \Longrightarrow f^+(x) = g^+(x) \Longrightarrow x \in X(f^+ = g^+) \Longrightarrow X(f = g) \subset X(f^+ = g^+) \Longrightarrow X(f^+ \neq g^+) \subset X(f \neq g) \Longrightarrow$ monotonitás miatt $\mu\big(X(f^+ \neq g^+)\big) \leqslant \mu\big(X(f \neq g)\big) = 0 \Longrightarrow \mu\big(X(f^+ \neq g^+)\big) = 0 \Longrightarrow f^+ = g^+$ m.m. Hasonlóan bizonyítható, hogy $f^- = g^-$ m.m.

► „⇐” $x \in X(f^+ = g^+) \cap X(f^- = g^-)$ esetén $f^+(x) = g^+(x)$ és $f^-(x) = g^-(x) \Longrightarrow f(x) = g(x) \Longrightarrow x \in X(f = g) \Longrightarrow X(f^+ = g^+) \cap X(f^- = g^-) \subset X(f = g) \Longrightarrow X(f \neq g) \subset X(f^+ \neq g^+) \cup X(f^- \neq g^-) \Longrightarrow \mu\big(X(f \neq g)\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{mon.}}}{\leqslant} \mu\big(X(f^+ \neq g^+) \cup X(f^- \neq g^-)\big) \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{szubadd.}}}{\leqslant} \mu\big(X(f^+ \neq g^+)\big) + \mu\big(X(f^- \neq g^-)\big) = 0 \Longrightarrow \mu\big(X(f \neq g)\big) = 0 \Longrightarrow f = g$ m.m. □

9.5. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f \colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$ μ-mérhető függvény. Azt mondjuk, hogy *f-nek létezik az integrálja*, ha

$$\int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty \quad \text{vagy} \quad \int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty.$$

Ekkor az f *integrálja*

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) := \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Ha $\int f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, akkor f-fet *integrálhatónak* nevezzük.

Tehát megkülönböztetjük a „*létezik az integrálja*” és az „*integrálható*” fogalmakat. Az első esetben megengedjük a ∞ és $-\infty$ értékeket is, de a másodikban nem. Hasonló a különbség a „létezik a határértéke” és a „konvergens” fogalmak között.

9.6. *Megjegyzés.* $\int f \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ esetén $\int f^- \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, illetve $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ esetén $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$.

9.7. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$ μ-mérhető függvény és $A \in \mathcal{A}$. Azt mondjuk, hogy *f-nek létezik az integrálja A felett*, ha $f\chi_A$-nak létezik az integrálja, és ekkor

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) := \int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu.$$

Ha $\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, akkor f-fet *integrálhatónak* nevezzük A felett.

9.8. *Megjegyzés.* $A = X$ választással azt kapjuk, hogy $\int\limits_X f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.

9.9. Definíció. Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $A \in \mathcal{A}$ és $f\colon A \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$. Azt mondjuk, hogy *$f$-nek létezik az integrálja A felett*, ha az

$$f^*\colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}, \qquad f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in A, \\ 0, & \text{ha } x \notin A \end{cases}$$

függvénynek létezik az integrálja, és ekkor

$$\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f(x) \,\mathrm{d}\mu(x) := \int f^* \,\mathrm{d}\mu.$$

Ha $\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, akkor f-fet *integrálhatónak* nevezzük A felett.

9.10. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$ μ-mérhető függvény, $A \in$ $\in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 0$. Ekkor f integrálható A felett, továbbá $\int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu = 0$.*

Bizonyítás. $\int (f\chi_A)^+ \,\mathrm{d}\mu = \int f^+\chi_A \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_A f^+ \,\mathrm{d}\mu = 0$ a 8.5. tétel miatt. Hasonlóan $\int (f\chi_A)^- \,\mathrm{d}\mu = 0$. Így definíció alapján kapjuk a tételt. □

9.11. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $f, g\colon X \to \mathbb{R}_b$ μ-mérhetőek. Ekkor*

① $f = g$ *m.m. és* $\exists \int f \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \exists \int g \,\mathrm{d}\mu$ *és* $\int g \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu$.

② f *integrálható* $\Longleftrightarrow |f|$ *integrálható és ekkor* $\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \int |f| \,\mathrm{d}\mu$.

③ (<u>homogenitás</u>) $\exists \int f \,\mathrm{d}\mu$ *és* $\alpha \in \mathbb{R} \Longrightarrow \exists \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu$ *és* $\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu$.

④ (<u>additivitás</u>) $\int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$ *értelmezett* $\Longrightarrow \exists \int (f+g) \,\mathrm{d}\mu$ *és* $\int (f+g) \,\mathrm{d}\mu =$ $= \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$.

⑤ $f \leqslant g$ *és* $\exists \int f \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ *(vagy* $\exists \int g \,\mathrm{d}\mu < \infty$*)* $\Longrightarrow \exists \int f \,\mathrm{d}\mu$, $\exists \int g \,\mathrm{d}\mu$ *és* $\int f \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g \,\mathrm{d}\mu$.

⑥ (<u>majoráns kritérium</u>) $|f| \leqslant g$ *m.m. és* g *integrálható* $\Longrightarrow f$ *integrálható.*

Bizonyítás. ► ① feltételeivel $f^+ = g^+$ m.m. és $f^- = g^-$ m.m., továbbá $\int f \,\mathrm{d}\mu =$ $= \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{8.6. tétel ②}}}{=} \int g^+ \,\mathrm{d}\mu - \int g^- \,\mathrm{d}\mu = \int g \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow$ ①.

► $|f|$ integrálható $\Longleftrightarrow \mathbb{R} \ni \int |f| \,\mathrm{d}\mu = \int (f^+ + f^-) \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{8.8. tétel}}}{=} \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu \Longleftrightarrow$ $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ és $\int f^- \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow f$ integrálható. Másrészt, ha f integrálható, akkor $\left|\int f \,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu\right| \leqslant \left|\int f^+ \,\mathrm{d}\mu\right| + \left|\int f^- \,\mathrm{d}\mu\right| = \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{8.8. tétel}}}{=}$ $= \int (f^+ + f^-) \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow$ ②.

► Tegyük fel, hogy $\exists \int f \,\mathrm{d}\mu$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ha $\alpha \geqslant 0$, akkor a 8.6. tétel ⑥ pontja miatt
$\int (\alpha f)^+ \,\mathrm{d}\mu = \int \alpha f^+ \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$, ha $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$, illetve
$\int (\alpha f)^- \,\mathrm{d}\mu = \int \alpha f^- \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$, ha $\int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$.
$\exists \int f \,\mathrm{d}\mu$, azaz $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ vagy $\int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow$
$\int (\alpha f)^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ vagy $\int (\alpha f)^- \,\mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow \exists \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu$. Másrészt ekkor szintén a 8.6. tétel ⑥ pontja miatt

$$\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \int (\alpha f)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (\alpha f)^- \,\mathrm{d}\mu = \int \alpha f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int \alpha f^- \,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \alpha \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \alpha \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \alpha\Big(\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu\Big) = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ha $\alpha < 0$, akkor $(\alpha f)^+ = -\alpha f^-$ és $(\alpha f)^- = -\alpha f^+$, melyből az előzőhöz hasonlóan bizonyítható, hogy $\exists \int \alpha f \,\mathrm{d}\mu$, másrészt

$$\int \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \int (\alpha f)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int (\alpha f)^- \,\mathrm{d}\mu = \int (-\alpha f^-) \,\mathrm{d}\mu - \int (-\alpha f^+) \,\mathrm{d}\mu =$$
$$= \alpha \int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \alpha \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \alpha\Big(\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu\Big) = \alpha \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ezzel ③ bizonyított.

► Tegyük fel, hogy $S := \int f \,\mathrm{d}\mu + \int g \,\mathrm{d}\mu$ értelmezett. $S \in \mathbb{R}$ esetén $\int f \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ és $\int g \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow \int f^+ \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$ és $\int g^+ \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow \infty > \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu =$ $= \int (f^+ + g^+) \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{9.2. lemma}}}{\geqslant} \int (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \exists \int (f+g) \,\mathrm{d}\mu$.

$S = \infty$ esetén $\int f \,\mathrm{d}\mu > -\infty$ és $\int g \,\mathrm{d}\mu > -\infty \Longrightarrow$ a 9.6. megjegyzés miatt $\infty > \int f^- \,\mathrm{d}\mu + \int g^- \,\mathrm{d}\mu = \int (f^- + g^-) \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{9.2. lemma}}}{\geqslant} \int (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \exists \int (f+g) \,\mathrm{d}\mu$.

$S = -\infty$ esetén $\int f \,\mathrm{d}\mu < \infty$ és $\int g \,\mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow$ a 9.6. megjegyzés miatt $\infty >$ $> \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu = \int (f^+ + g^+) \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ \text{9.2. lemma}}}{\geqslant} \int (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \exists \int (f+g) \,\mathrm{d}\mu$. A ④ bizonyításához még az egyenlőséget kell belátni.
$(f+g)^+ - (f+g)^- = f + g = f^+ - f^- + g^+ - g^- \Longrightarrow$
$(f+g)^+ + f^- + g^- = (f+g)^- + f^+ + g^+ \Longrightarrow$
$\int (f+g)^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu + \int g^- \,\mathrm{d}\mu = \int (f+g)^- \,\mathrm{d}\mu + \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int g^+ \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow$ ④.

► $f \leqslant g$ esetén $f^+ \leqslant g^+$ és $f^- \geqslant g^-$, így a 9.6. megjegyzés miatt,

1) ha $\exists \int f \,\mathrm{d}\mu > -\infty \Longrightarrow \infty > \int f^- \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int g^- \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \exists \int g \,\mathrm{d}\mu$,

2) ha $\exists \int g \,\mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow \infty > \int g^+ \,\mathrm{d}\mu \geqslant \int f^+ \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \exists \int f \,\mathrm{d}\mu$.

Az ⑤ bizonyításához még az egyenlőtlenséget kell belátni. Mivel $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g^+ \,\mathrm{d}\mu$ és $-\int f^- \,\mathrm{d}\mu \leqslant -\int g^- \,\mathrm{d}\mu$, így a két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk ⑤-öt.

► ⑥ feltételeivel $g^+ \geqslant g^+ - g^- = g \geqslant |f|$ m.m. $\Longrightarrow \int |f| \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int g^+ \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$, hiszen g integrálható $\Longrightarrow \int |f| \,\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R} \Longrightarrow$ ② miatt f integrálható, azaz ⑥ teljesül. □

9.12. Tétel. *Legyen* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mértéktér,* $f\colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$, $A_i \in \mathcal{A}$ $(i \in I \subset \mathbb{N})$ *diszjunktak és* $A := \bigcup_{i \in I} A_i$. *Ha* $\exists \int f \,\mathrm{d}\mu \Longrightarrow \exists \int_A f \,\mathrm{d}\mu$ *és* $\exists \int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu$ $\forall i \in I$, *továbbá*

$$\int_A f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i \in I} \int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu.$$

Bizonyítás. $\int (f\chi_A)^+ \,\mathrm{d}\mu = \int f^+ \chi_A \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty$ vagy $\int (f\chi_A)^- \,\mathrm{d}\mu =$ $= \int f^- \chi_A \,\mathrm{d}\mu \leqslant \int f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty \Longrightarrow \exists \int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu = \int_A f \,\mathrm{d}\mu$. Hasonlóan látható, hogy $\exists \int_{A_i} f \,\mathrm{d}\mu$ $\forall i \in I$. Ezután azt bizonyítjuk, hogy

$$g\chi_A = \sum_{i \in I} g\chi_{A_i}, \tag{9.1}$$

ahol $g\colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$ tetszőleges függvény. $x \in A$ esetén létezik pontosan egy i_0 index, melyre $x \in A_{i_0} \Longrightarrow \sum_{i \in I} g(x)\chi_{A_i}(x) = g(x)\chi_{A_{i_0}}(x) = g(x)\chi_A(x)$, illetve $x \notin A$ esetén $x \notin A_i$ $\forall i \in I \Longrightarrow \sum_{i \in I} g(x)\chi_{A_i}(x) = 0 = g(x)\chi_A(x) \Longrightarrow$ (9.1). Most rátérünk az egyenlőség bizonyítására. $\int f\chi_A \,\mathrm{d}\mu = \int f^+\chi_A \,\mathrm{d}\mu - \int f^-\chi_A \,\mathrm{d}\mu \underset{\substack{\Uparrow \\ (9.1)}}{=} \sum\limits_{i\in I}\Big(\int f^+\chi_{A_i} \,\mathrm{d}\mu -$

$- \int f^-\chi_{A_i} \,\mathrm{d}\mu\Big) = \sum\limits_{i\in I} \int f\chi_{A_i} \,\mathrm{d}\mu \implies$ állítás. $\square$

9.13. Tétel (Lebesgue majorált konvergencia tétele)**.** *Legyen* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *mérték-tér és* $g, f, f_n\colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$ $(n \in \mathbb{N})$ *μ-mérhető függvények. Ha g integrálható,* $|f_n| \leqslant g$ *m.m.* $\forall n \in \mathbb{N}$*-re és* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ *m.m.* $\implies$ *f és f_n integrálható függvények* $\forall n \in \mathbb{N}$*-re, továbbá*

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

10. Lebesgue-integrál

A Lebesgue-mérték szerinti integrált *Lebesgue-integrálnak* nevezzük. Megmutatjuk, hogy Lebesgue-integrálhatóságból nem következik a Riemann-integrálhatóság. Legyen például

$$f\colon [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{ha } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Ekkor

$$f^*\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f^*(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in [0,1] \\ 0, & \text{ha } x \notin [0,1] \end{cases} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

jelöléssel

$$\int\limits_{[0,1]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int f^* \,\mathrm{d}\lambda = 1 \cdot \underbrace{\lambda\big(\mathbb{Q} \cap [0,1]\big)}_{0} + 0 \cdot \lambda\big(\overline{\mathbb{Q} \cap [0,1]}\,\big) = 0.$$

Másrészt ismert, hogy f Riemann-szerint nem integrálható.

10.1. Tétel (Lebesgue-kritérium)**.** *Legyen* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ *korlátos függvény. Az f Riemann-integrálható* $\iff$ *f folytonos λ-m.m.* $[a,b]$*-n.*

10.2. Tétel. *Ha* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a, b \in \mathbb{R},\ a < b)$ *Riemann-integrálható* $\implies$ *f Lebesgue-integrálható $[a,b]$ felett és* $\int\limits_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int\limits_a^b f$.

11. Mértékterek szorzata, kétszeres integrál

11.1. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek és

$$\gamma\colon \{A \times B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\} \to [0, \infty], \quad \gamma(A \times B) := \mu(A)\nu(B).$$

A γ-hoz tartozó külső mértéket jelöljük $\mu \otimes \nu$-vel. A $\mu \otimes \nu$-mérhető halmazok rendszerét jelöljük $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-vel. A $\mu \otimes \nu$-nek $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$-re vett leszűkítését a *μ és ν mértékek szorzatának* nevezzük, és ezt is $\mu \otimes \nu$-vel jelöljük. Az $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$ teljes mértékteret az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek *szorzatterének* nevezzük.

11.2. Definíció. Legyen $n \geqslant 3$ egész és $(X_i, \mathcal{A}_i, \mu_i)$ mértékterek $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Rekurzióval definiáljuk a

$$\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n := (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_{n-1}) \otimes \mu_n$$

külső mértéket az $X_1 \times \cdots \times X_n = (X_1 \times \cdots \times X_{n-1}) \times X_n$-en. Legyen

$$\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n := (\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n.$$

A $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ külső mérték leszűkítését $\mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$-re a μ_i-k szorzatának nevezzük és szintén $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$-nel jelöljük. Ha $X_1 = \cdots = X_n$, $\mathcal{A}_1 = \cdots = \mathcal{A}_n$ és $\mu_i = \cdots = \mu_n$, akkor a $\mu^n := \mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ és $\mathcal{A}^n := \mathcal{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{A}_n$ jelöléseket használjuk. Ugyanezt a jelölést használjuk $n = 2$ esetén is.

11.3. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér és $B_1, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$. Ekkor $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{A}^n$ és $\mu^n(B_1 \times \cdots \times B_n) = \mu(B_1) \cdots \mu(B_n)$.*

11.4. Definíció. Legyenek $(X, \mathcal{A}, \mu)$ és $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ mértékterek és $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}_\mathrm{b}$. Tegyük fel, hogy a

$$g_y\colon X \to \mathbb{R}_\mathrm{b}, \quad g_y(x) := f(x, y)$$

függvénynek ν-szerint majdnem minden $y \in Y$ esetén létezik az integrálja μ szerint, és a

$$h\colon Y \to \mathbb{R}_\mathrm{b}, \quad h(y) = \begin{cases} \int g_y \,\mathrm{d}\mu, & \text{ha } \exists \int g_y \,\mathrm{d}\mu, \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

függvénynek létezik az integrálja ν szerint. Ekkor azt mondjuk, hogy f-nek létezik az

$$\iint f \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\nu = \iint f(x, y) \,\mathrm{d}\mu(x) \,\mathrm{d}\nu(y) := \int h \,\mathrm{d}\nu$$

kétszeres integrálja. Hasonlóan értelmezhető $\iint f \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu = \iint f(x, y) \,\mathrm{d}\nu(y) \,\mathrm{d}\mu(x)$ is.

11.5. Tétel (Fubini-tétel)**.** *Legyenek* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *és* $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *teljes mértékterek, továbbá* $f\colon X \times Y \to \mathbb{R}_b$ *egy olyan függvény, mely egy* σ*-véges halmazon kívül eltűnik, azaz* $\exists H \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ σ*-véges halmaz, hogy* $f(x, y) = 0$ $\forall (x, y) \in \overline{H}$*-ra. Ha* f*-nek létezik az integrálja* ($\mu \otimes \nu$*-szerint*) $\Longrightarrow$ *léteznek az alábbi integrálok és*

$$\int f \,\mathrm{d}(\mu \otimes \nu) = \iint f \,\mathrm{d}\mu \,\mathrm{d}\nu = \iint f \,\mathrm{d}\nu \,\mathrm{d}\mu.$$

12. Többdimenziós Lebesgue-mérték

12.1. Definíció. Az $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda^n)$ ($n \geqslant 2$ egész) mértékteret *n-dimenziós Lebesgue-mértéktérnek*, λ^n-net pedig *n-dimenziós Lebesgue-mértéknek* nevezzük. A Lebesgue-mértéket szokás *egydimenziós Lebesgue-mértéknek* is nevezni. Geometriai értelemben λ^2 a *területet*, λ^3 pedig a *térfogatot* jelenti.

A következő tétel a 11.3. tétel speciális esete.

12.2. Tétel. $B_i \in \mathcal{L}$ ($i = 1, \ldots, n$) *esetén* $B_1 \times \cdots \times B_n \in \mathcal{L}^n$*, továbbá*

$$\lambda^n(B_1 \times \cdots \times B_n) = \lambda(B_1) \cdots \lambda(B_n).$$

12.3. Tétel. *Az* $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) *minden Borel-mérhető részhalmaza* λ^n*-mérhető.*

Bizonyítás. Az 5.2. tétel alapján

$$\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) = \Big\{\bigcup_{i=1}^{\infty} T_i : T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \ \forall i \in \mathbb{N}\Big\}.$$

A $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ elemei λ^n-mérhetőek a 12.2. tétel miatt, így $N \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$ esetén $N \in \mathcal{L}^n$. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ az $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n)$-et tartalmazó legszűkebb σ-algebra, így $\mathcal{N}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^n$ miatt, mivel $\mathcal{L}^n$ σ-algebra, $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}^n$ teljesül. $\square$

12.4. Tétel. *Ha* $H \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) *Jordan-mérhető, akkor* λ^n*-mérhető is, továbbá a Jordan-mértéke* $\lambda^n(H)$*-val egyenlő.*

A következő tétel szerint a Lebesgue-mérték a nyílt téglák mértékeiből is generálható.

12.5. Tétel. *Legyen $\mathcal{H}$ az $\mathbb{R}$ racionális végpontú korlátos intervallumainak rendszere, $n \in \mathbb{N}$ és $\mathcal{T}(\mathbb{R}^n) := \{I_1 \times \ldots \times I_n \subset \mathbb{R}^n : I_i \in \mathcal{H}\ (i = 1, \ldots, n)\}$. Ekkor*

$$\lambda^n(B) = \inf\Big\{\sum_{i \in I} \lambda^n(T_i) : I \subset \mathbb{N},\ T_i \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n)\ (i \in I),\ B \subset \bigcup_{i \in I} T_i\Big\}$$

minden $B \subset \mathbb{R}^n$ esetén.

Az n-dimenziós Lebesgue-mérhetőség és -mérték – hasonlóan az egydimenziós esethez – invariáns az eltolásra.

12.6. Tétel (Eltolás-invariancia)**.** *Legyen $r \in \mathbb{R}^n$, $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $g(x) := x + r$ és $A \subset \mathbb{R}^n$. Ekkor*

$$\lambda^n\big(g(A)\big) = \lambda^n(A),$$

továbbá, ha $A \in \mathcal{L}^n$, akkor $g(A) \in \mathcal{L}^n$.

A Riemann-integrál nemnegatív függvény esetén a függvény alatti síkidom Jordan-mértékével egyezik meg. A következő tétel ezt fogalmazza meg általánosabban.

12.7. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to [0, \infty)$ μ-mérhető függvény és $T_* := \{(x, y) \in X \times \mathbb{R} : 0 \leqslant y < f(x)\}$. Ekkor $T_* \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{L}$, továbbá*

$$(\mu \otimes \lambda)(T_*) = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$

Ha f nemnegatív Lebesgue-mérhető függvény, akkor az f görbéje alatti síkidom területe az f Lebesgue-integráljával egyezik meg. Ezt fejezi ki a következő tétel.

12.8. Tétel. *Ha $f\colon [a, b] \to [0, \infty)$ λ-mérhető, akkor $T_* := \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbb{R} : : 0 \leqslant y < f(x)\}$ jelöléssel $T_* \in \mathcal{L}^2$ és $\lambda^2(T_*) = \int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda$.*

13. Mértékek deriváltja

A 8.5. és 9.12. tételekből következik az alábbi állítás:

13.1. Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktér, $f\colon X \to [0, \infty]$ μ-mérhető függvény és $\nu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$, $\nu(A) := \int_A f \,\mathrm{d}\mu$. Ekkor $(X, \mathcal{A}, \nu)$ mértéktér.*

Ennek mikor igaz a megfordítása, azaz egy mérték mikor áll elő egy nemnegatív mérhető függvény integráljaként? Pontosabban, ha μ és ν mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren, akkor milyen feltétellel létezik olyan $f\colon X \to [0, \infty]$ μ-mérhető függvény, hogy $\nu(A) := \int\limits_A f \,\mathrm{d}\mu \;\forall A \in \mathcal{A}$? Ennek egy szükséges feltételét adja a 8.5. tétel, miszerint ha $A \in \mathcal{A}$ esetén $\mu(A) = 0$, akkor $\nu(A) = 0$. A Radon–Nikodym-tétel kimondja, hogy σ-véges mértékek esetén ez elégséges feltétel is.

13.2. Definíció. Legyenek μ ill. ν mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $A \in \mathcal{A}$, $\mu(A) = 0$ esetén $\nu(A) = 0$, akkor azt mondjuk, hogy *ν abszolút folytonos* μ-re nézve. Jele: $\nu \ll \mu$.

13.3. Tétel (Radon–Nikodym-tétel)**.** *Legyenek μ ill. ν σ-véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $\nu \ll \mu$, akkor létezik $\varphi\colon X \to [0, \infty)$ μ-mérhető függvény, melyre*

$$\nu(A) = \int\limits_A \varphi \,\mathrm{d}\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

A φ μ-m.m. egyértelműen meghatározott, azaz ha $\widetilde{\varphi}$ is hasonló tulajdonságú, akkor $\varphi = \widetilde{\varphi}$ μ-m.m. A $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} := \varphi$ függvényt ν-nek μ-re vonatkozó Radon–Nikodym-deriváltjának *nevezzük.*

13.4. *Megjegyzés.* $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenciálható és $[F(x)]_a^b = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ esetén $\frac{\mathrm{d}F(x)}{\mathrm{d}x} = f(x)$ mintájára vezettük be $\nu(A) = \int\limits_A \varphi \,\mathrm{d}\mu$ esetén a $\frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\mu} := \varphi$ jelölést.

13.5. Tétel (Láncszabály)**.** *Legyenek μ, ν és κ σ-véges mértékek az $(X, \mathcal{A})$ mérhető téren. Ha $\mu \ll \nu$ és $\nu \ll \kappa \Longrightarrow \mu \ll \kappa$ és $\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\kappa} = \frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}\nu} \cdot \frac{\mathrm{d}\nu}{\mathrm{d}\kappa}$ κ-m.m.*